PRÁCTICA 3

VARIABLES ALEATORIAS

Ejercicio 1.

a) Sea X el número de caras obtenidas en 4 lanzamientos de una moneda honesta. Dibuje el gráfico de $F(x) = P(X \leq x)$, la función de distribución acumulada de X.

b) Si adoptáramos $F(x) = P(X < x)$ como definición de función de distribución de X, ¿Cuál sería la diferencia entre el gráfico de F_X y el dibujado en a)?.

Ejercicio 2. Distribuya aleatoriamente n bolas distinguibles en m celdas, y sea U la variable aleatoria "número de bolas que caen en la celda 1". Encuentre la distribución de U.

Ejercicio 3. Con el propósito de verificar la exactitud de sus estados financieros, las compañías tienen auditores permanentes para verificar los asientos contables. Supóngase que los empleados de una compañía efectúan asientos erróneos el 5% de las veces. Si un auditor verifica tres asientos al azar.

a) Encuentre la distribución de probabilidad para Y, el número de errores detectado por el auditor.

b) Encuentre la probabilidad de que el auditor detecte más de un error.

Ejercicio 4. Un complejo sistema electrónico está construido con cierto número de componentes de apoyo en sus subsistemas. Un subsistema contiene cuatro componentes idénticos, cada uno con una probabilidad de 0.2, de fallar en menos de 1.000 horas. El subsistema funciona si dos componentes cualesquiera de los cuatro trabajan en forma adecuada. Se supone que los componentes operan independientemente.

a) Encuentre la probabilidad de que exactamente dos de cuatro componentes resistan más de 1.000 horas.

b) Encuentre la probabilidad de que el subsistema funcione por más de 1.000 horas.

Ejercicio 5. Una concentración particular de una sustancia química, encontrada en agua contaminada, resulta ser mortal para el 20% de los peces expuestos a esta concentración durante 24 horas. Se colocan 20 peces en un tanque que contiene agua con esta concentración del producto químico.

a) Determine la probabilidad de que exactamente 14 sobrevivan.

b) Determine la probabilidad de que por lo menos 10 sobrevivan.

c) Obtenga la probabilidad de que a lo más 16 sobrevivan.

Ejercicio 6. Un experimento consiste en tirar un dado equilibrado hasta obtener el primer as. Sea X el número de tiradas necesarias.

a) Describir el espacio muestral asociado a este experimento.

b) Encontrar las funciones de frecuencia y de distribución asociadas a X.

c) Calcular la probabilidad de que haga falta un número par de tiradas.

d) Sea Y la variable aleatoria que cuenta el número de tiradas hasta el tercer as. Obtener la distribución de Y (binomial negativa).

Ejercicio 7.

a) Sea $X \sim \mathcal{B}i(n,p)$ y $Y \sim \mathcal{G}(p)$. Demostrar que $P(X=0) = P(Y>n)$.

b) Hallar el número de niños que debe tener un matrimonio para que la probabilidad de tener al menos un varon sea $\geq \frac{8}{9}$.

Ejercicio 8. Un fabricante ofrece relojes en lotes de 50, en el cual hay buenos, recuperables y desechables. Para ver si adquiere el lote, un comprador toma una muestra de 8 de los cuales, al menos 5 deben ser buenos y ninguno desechable. Encontrar la probabilidad de que compre si en realidad hay 20 buenos, 25 recuperables y 5 desechables.

Ejercicio 9. Se tienen 3 fuentes radiactivas F1, F2 y F3. El número de partículas que emite cada fuente por hora es una variable con distribución $P(\lambda_i)$, siendo $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$ y $\lambda_3 = 4$. Un investigador elige una fuente al azar y observa que ésta emite 4 partículas en una hora. Encontrar la probabilidad de que haya elegido la fuente F2.

Ejercicio 10. Sea X una variable aleatoria con densidad

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} .$$

a) Determinar el valor de c.
b) Determine α tal que $F_X(\alpha) = \frac{1}{4}$.

Ejercicio 11. El diámetro D (expresado en dm.) del tronco de cierta especie de árboles es una v.a. con función de densidad:

$$f_D(x) = kxI_{(0,10)}(x)$$

a) Hallar el valor de la constante k.
b) ¿Cual es la probabilidad de que el diámetro de un árbol de esa especie elegido al azar mida entre 4 y 6 dm?
c) Idem 2.b) sabiendo que el diámetro mide mas de 5 dm.
d) En un area del bosque hay 3 árboles de esa especie. Calcular la probabilidad de que exactamente 2 de ellos tengan diámetro entre 4 y 6 dm.
e) ¿Cuantos árboles habría que muestrear en el bosque para que la probabilidad de encontrar al menos uno cuyo diámetro mida entre 4 y 6 dm. sea ≥ 0.99?

Ejercicio 12. Hallar la densidad de la variable aleatoria X con función de distribución

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 & x > 1 \\ x^3 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

Ejercicio 13. El colectivo que toma Felipe para ir al trabajo llega a la parada en algún momento entre las 10 y las 10:30 con distribución uniforme. El llega a la parada a las 10 de la manana,

a) ¿Cual es la probabilidad de que tenga que esperar mas de 10 minutos?
b) Si el colectivo no llego a las 10:15, encontrar la probabilidad de que tenga que esperar por lo menos otros 10 minutos mas.

Ejercicio 14. El tiempo de un viaje (ida y vuelta) de los camiones que transportan concreto hacia una obra de construcción en una carretera, está distribuído uniformemente en un intervalo de 50 a 70 minutos. ¿Cuál es la probabilidad de que la duración del viaje sea mayor a 65 minutos, si se sabe que la duración del viaje es mayor a 55 minutos?

Ejercicio 15. Supongamos que el tiempo de vida medido en meses de un componente electrónico tiene una distribución exponencial de parámetro $\lambda = 0.1$.

a) Calcular la probabilidad de que el tiempo de vida sea menor a 10 meses.
b) Calcular la probabilidad de que el tiempo de vida este entre 5 y 15 meses.

c) Hallar A para que la probabilidad de que el tiempo de vida sea mayor que A sea 0.01.

Ejercicio 16. Las partículas de una sustancia radioactiva se desintegran en un tiempo T (medido en segundos) que tiene distribución exponencial de parámetro λ. Si durante el 1^{er} segundo se desintegra el 50% de las partículas, ¿Cuánto demorará en desintegrarse el 75%?.

Ejercicio 17. Suponga que la vida útil de una lámpara tiene distribución exponencial de parámetro λ y sea T la vida útil de dicha lámpara, medida en días.

a) Pruebe que $P(T > t+s | T > t) = P(T > s)$ para todo $s > 0$ y $t > 0$. (Esta proposición se llama falta de memoria de la distribución exponencial).

b) Sea $\lambda = 3hs$. Una lámpara es encendida en una habitación en el instante $t = 0$; un día después una persona entra en la habitación y permanece en ella 8 horas, saliendo luego.

   i) Halle la probabilidad de que esta persona haya entrado en la habitación cuando ya estaba oscura.

   ii) Halle la probabilidad de que esta persona haya entrado con la lámpara encendida y salido con la lámpara quemada.

Ejercicio 18. Consideremos la distribución normal estándar ($Z \sim N(0,1)$).

a) ¿Cuál es la probabilidad de observar un resultado mayor que 2.6?

b) Calcular $P(Z < 1.35)$

c) Calcular $P(-1.7 < Z < 3.1)$

d) Hallar a de modo que $P(Z < a) = 0.85, P(Z > a) = 0.15$

Ejercicio 19. Entre las mujeres de 18 y 74 años de edad, la presión arterial diastólica se distribuye normalmente con media = 77 mm Hg y desvío estándar = 11.6 mm Hg.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una mujer seleccionada al azar tenga presión arterial diastólica menor que 60 mm Hg?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga presión arterial diastólica mayor que 90 mm Hg?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga una presión arterial diastólica entre 60 y 90 mm Hg?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que su presión esté a menos de un desvío de la media?

Ejercicio 20. La distribución de pesos en la población de varones es aproximadamente normal con media = 73 kg. y un desvío standard de $\sigma = 12kg$.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un varón seleccionado al azar pese menos de 65 kg?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que pese más de 95 kg?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que entre cinco varones seleccionados al azar de esa población, al menos uno tenga un peso fuera del rango 65 kg - 95 kg?

Ejercicio 21. En un estudio, se midieron los niveles de colesterol de un gran número de varones sanos. La población fue luego seguida por 16 años. Al final de este período, los varones fueron divididos en dos grupos: aquellos que habían desarrollado enfermedades coronarias y aquellos que no lo hicieron. La distribución de los niveles de colesterol iniciales para cada grupo resultó aproximadamente normal. Entre los individuos que desarrollaron enfermedades coronarias la media del nivel de colesterol fue $\mu_e = 244mg/100ml$ con un desvío estándar de $\sigma_e = 51mg/100ml$ y para aquellos que no desarrollaron la enfermedad $\mu_s = 219mg/100ml$ con un desvío estándar de $\sigma_s = 41mg/100ml$. Suponiendo que para predecir enfermedades coronarias usamos un nivel de 260 mg/100 ml o mayor.

a) ¿Cuál es la probabilidad de predecir correctamente la enfermedad coronaria en un varón que la desarrollará?

b) ¿Cuál es la probabilidad de predecir una enfermedad coronaria en un varón que no la desarrollará?

c) ¿Cuál es la probabilidad de fallar en predecir una enfermedad coronaria en un varón que la desarrollará?

d) ¿Cómo cambiarán las probabilidades de los errores falso positivo y falso negativo si el punto de corte para predecir se bajara a 250 mg/100 ml?

Ejercicio 22. En una cierta población humana, el índice cefálico I (anchura del cráneo expresada como porcentaje de la longitud) se distribuye normalmente entre los individuos. Hay un 58 % con $I \leq 75$, un 38 % con $75 \leq I \leq 80$ y un 4 % con $I > 80$. Hallar la función de densidad del índice y la $P(78 \leq I \leq 82)$.